16/1/2018

SOS

ΑΣΚΗΣΗ

Η σππ της τ.μ. Χ

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0\le x\le 3\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Κατανομή τ.μ. $Y=X^3$

Θεωρώ τον μετασχηματισμό $y=g(x)=x^3$, $x\in I=[0,3]$

Τις τιμές της τ.μ. Y: $y\in[0,27]=g(I)$

i) Ο g είναι 1-1

(α) Έστω $x_1,x_2\in[0,3]=I$ τ.ώ. $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα g είναι 1-1

(β) Αλλιώς $g'(x)=3x^2>0\quad\forall x\in(0,3]$

Η $g\uparrow$ γν. αύξουσα η g 1-1

$\exists\, g^{-1}$ και είναι $x=g^{-1}(y)=y^{1/3}$ $\quad y\in g(I)=[0,27]$

ii) $\frac{d}{dy}g^{-1}(y)=\frac{1}{3}y^{1/3-1}=\frac{1}{3y^{2/3}}\neq 0$ και συνεχής

Επειδή τα i) και ii) ισχύουν η $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$

$$=\frac{(y^{1/3})^2}{9}\cdot\frac{3}{3y^{2/3}}=\frac{1}{27},\quad y\in[0,27]$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/27, & 0\le y\le 27\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Αναγνωρίζω $Y\sim U(0,27)$

ΑΣΚΗΣΗ

(α) N μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το N τοποθετούνται η μία μετά την άλλη σε μία γραμμή

i) Να υπολογιστεί η πιθανότητα οι μπάλες με αριθμούς 1 και N να τοποθετηθούν η μία δίπλα στην άλλη

ii) P(οι μπάλες με τους αριθμούς 1 και N να τοποθετηθούν η μία στο ένα άκρο και η άλλη στο άλλο) (β) m $(m>7)$ τοποθετούνται στην τύχη και ανεξάρτητα η μία από την άλλη σε N κουτιά τα οποία είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο

P(όλες οι μπάλες να τοποθετηθούν σε διαδοχικά κουτιά και επιπλέον οι μπάλες με τους αριθμούς 1, 3 και 7 να βρίσκονται και αυτές με τη σειρά αυτή σε διαδοχικά κουτιά) = ?

(γ) Η διαδικασία τοποθέτησης των μπαλών του (β) επαναλαμβάνεται και έστω $N=10$, $m=8$.

(i) Σε 5 επαναλήψεις πόσες φορές αναμένεται οι μπάλες να τοποθετηθούν σε διαδοχικά κουτιά και οι 1,3,7 σε διαδοχ. κουτιά

(ii) P(να επαναληφθεί η διαδικασία αυτή 6 φορές μέχρις ότου για 2η φορά όλες οι μπάλες να τοποθετηθούν σε διαδοχικά κουτιά και οι 1,3,7 σε διαδοχικά κουτιά.)

ΛΥΣΗ

α) i) $\frac{2(N-1)!}{N!}$

ii) $\frac{1}{N} \dots \frac{N}{1}$ Άρα $\frac{2(N-2)!}{N!}$

β) $\frac{(m-3+1)!\,(N-m+1)!}{N^m}$ ← ισοπίθανο μοντέλο

$N=10$
$m=8$
Άρα $=2,16\times10^{-5}$

γ) i) Έστω $E=\left\{\begin{array}{l}\text{οι μπάλες σε διαδοχικά κουτιά} \\ \text{και οι } 1,3,7 \text{ —"—}\end{array}\right\}$

Έστω X το πλήθος E στις 5 επαναλήψεις

$X \sim B(5,\ p=P(E) \xrightarrow[N=10,\ m=8]{(β)} 2,16\times10^{-5})$

Τότε $E(X)=np=5\times(2,16\times10^{-5}) = ..$

ii) Έστω Y το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι την 2η επιτυχία

$Y \sim NB(k=2,\ p=P(E)=2,16\times10^{-5})$

Τότε: $P(Y=6)=p_Y(6) = \binom{6-1}{2-1}(2,16\times10^{-5})^2 \cdot$
$(1-2,16\times10^{-5})^{6-2}$

ΑΣΚΗΣΗ

Ένας κατασκευαστής επίπλων χρησιμοποιεί ελαστικό υλικό σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου για την κατασκευή ενός καναπέ. Γνωρίζει επίσης ότι ένα άτομο κάθεται αναπαυτικά στον καναπέ αν το ελαστικό υλικό έχει αρκετό ύψος ώστε να μην συμπιέζεται εντελώς. Από την εμπειρία του έχει διαπιστώσει ότι το ελαστικό υλικό συμπιέζεται κατά ένα ύψος το οποίο περιγράφεται από την κατανομή Γάμμα με μέση τιμή 5εκ. και τυπική απόκλιση 5εκ. όταν ένα άτομο κάθεται στον καναπέ. Είναι επίσης γνωστό ότι αν καθίσουν 3 άνθρωποι στον καναπέ ο ένας μετά τον άλλο και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, η πιθανότητα να κάθονται και οι 3 αναπαυτικά και να μην συμπιεστεί εντελώς το ελαστικό υλικό είναι 1/8. Με βάση αυτά τα δεδομένα, ποιο τουλάχιστον πρέπει να είναι το ύψος του ελαστικού υλικού που να χρησιμοποιήσει ο κατασκευαστής;

Λύση

Δίνεται $\log(0,5) = -0,693$

Έστω x_0 το ύψος του ελαστικού υλικού. Ζητώ το x_0

Έστω X το ύψος στο οποίο συμπιέζεται τουλάχ. όταν κάθεται ένας άνθρωπος. $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$E(x)=\alpha\beta$ κ' $Var(x)=\alpha\beta^2$

Δίνεται $E(x)=5$ $\sqrt{Var(x)}=5$

Άρα: $\alpha=1$ και $\beta=5$

Έστω $E=\{$κάποιος να κάθεται αναπαυτικά$\}$ και έστω Y τ.μ. παριστά το πλήθος των ατόμων που κάθονται αναπαυτικά

Δηλ. Y παριστά πλήθος επιτυχιών στις 3 επαναλήψεις.

$Y \sim B(3, p=P(E))$ $p=$ άγνωστο

Ξέρω $P(Y=3)=\frac{1}{8} \Rightarrow p_Y(3)=\frac{1}{3} \Rightarrow \binom{3}{3} p^3 (1-p)^{3-3} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \boxed{p=1/2}$ Άρα $P(E)=\frac{1}{2}=P($ένα άτομο κάθεται αναπαυτικά$)=P(X<x_0)=$

$$= \int_0^{x_0} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \int_0^{x_0} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-x_0/5} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = -5 \cdot \log\frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \cong 3,465 \text{ cm}$$